

Cours – Séquence n° 7 – PROBABILITÉS (I) :

succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

I- SUCCESION D'ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définitions

1. Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**.

Soient n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et n épreuves successives indépendantes d'univers $E_1, E_2, \dots, E_n$.

2. L'**univers** E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le **produit cartésien** :
 $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

3. Les **issues** de ces n épreuves successives indépendantes sont les **n -uplets** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 où $x_i \in E_i$ pour tout entier naturel i , avec $1 \leq i \leq n$.

Propriété (admise)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des issues de ses composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$.

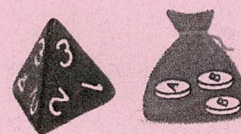
Exemple 1

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4.

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_1 = \{1; 2; 3; 4\}$.

Puis, on tire au hasard un jeton dans un sac contenant un jeton A et deux jetons B.

L'univers de cette expérience aléatoire est $E_2 = \{A; B\}$.



- La loi de probabilité de chacune des épreuves est :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

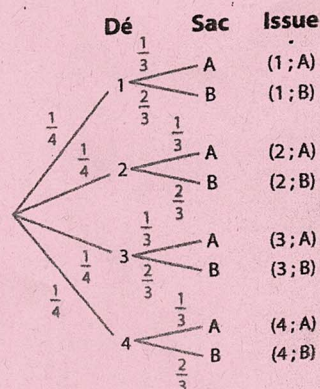
Issue	A	B
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

- La succession de ces deux épreuves indépendantes a pour univers $E = E_1 \times E_2$.
- On peut représenter les issues à l'aide de l'arbre ci-contre :
- D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes est :

Issue	(1 ; A)	(1 ; B)	(2 ; A)	(2 ; B)	(3 ; A)	(3 ; B)	(4 ; A)	(4 ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

$$P(1 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} ;$$

$$P(2 ; B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} .$$



II- ÉPREUVE, LOI ET SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues dont :

- l'une est souvent appelée « **succès** » et notée S ,
- l'autre est souvent appelée « **échec** » et notée $\bar{S}$.

Exemples

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.

- On tire une boule au hasard et on note la couleur de la boule tirée.
Cette expérience aléatoire a trois issues, donc ce n'est pas une expérience de Bernoulli.
- Mais on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli si l'expérience consiste à regarder si on tire une boule rouge ou non. Dans ce cas :
 - le succès S est l'événement : « Tirer une boule rouge » avec $P(S) = 0,3$
 - et l'échec $\bar{S}$ est l'événement : « Tirer une boule bleue ou jaune » et $P(\bar{S}) = 0,7$

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli où la probabilité du succès est p .

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de X , présentée dans le tableau ci-contre,

est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** .

a	0	1
$P(X = a)$	$1 - p$	p

Exemple

On reprend l'expérience de Bernoulli de l'exemple précédent.

$$p = P(S) = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Donc la loi de Bernoulli de paramètre 0,3 est le tableau ci-contre:

a	0	1
$P(X = a)$	0,7	0,3

Propriété : espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p

Pour une variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , on a :

- l'espérance de X : $E(X) = p$ $E(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i$
- la variance de X : $V(X) = p(1 - p)$ $V(X) = \sum_{i=1}^2 p_i (x_i - E(X))^2$

Démonstration

- $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0)$
 $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p)$
 $E(X) = p$
- $V(X) = (1 - E(X))^2 \times P(X = 1) + (0 - E(X))^2 \times P(X = 0)$
 $V(X) = (1 - p)^2 \times p + (0 - p)^2 \times (1 - p)$
 $V(X) = p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3$
 $V(X) = p - p^2$
 $V(X) = p(1 - p)$

Définition

Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

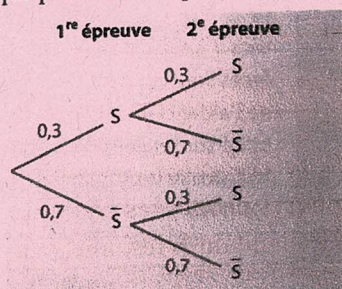
Exemple

On reprend l'expérience de Bernoulli de l'exemple précédent.

On répète deux fois cette expérience en remplaçant la boule dans l'urne avant chaque nouveau tirage.

Le fait de remplacer la boule dans l'urne (tirage avec remise) assure que les tirages sont identiques et indépendants.

Cela constitue un schéma de Bernoulli qui peut être représenté par l'arbre pondéré ci-dessous.

**III- LOI BINOMIALE****Définition**

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p .

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** (ou loi du nombre de succès) **de paramètres n et p** .

Remarques

1. La variable aléatoire X prend donc toutes les valeurs entières entre 0 (aucun succès) et n (que des succès).
2. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p que l'on note $B(n; p)$.

Exemple

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p . X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

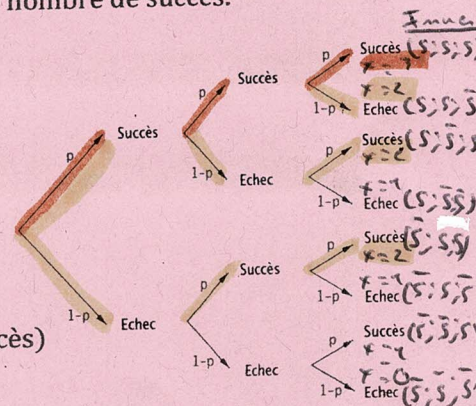
On a par exemple :

- L'événement $X = 3$ correspond à la seule issue (Succès ; Succès ; Succès).
En suivant les branches sur le haut de l'arbre, on obtient cette issue avec une probabilité égale à $p \times p \times p$.
Donc $P(X = 3) = p^3$.
- L'événement $X = 2$ correspond à l'obtention des d'issues : (Succès ; Succès ; Échec), (Succès ; Échec ; Succès) et (Échec ; Succès ; Succès)
Donc $P(X = 2) = 3 \times p^2 \times (1 - p)$.

- On remarque que :

Le nombre de chemins conduisant à 3 succès parmi 3 épreuves est $\binom{3}{3} = 1$.

Le nombre de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves est $\binom{3}{2} = 3$.



Propriété : probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Démonstration*

Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n - k$ échecs (de probabilité $1 - p$).

Ainsi la probabilité d'obtenir l'issue en suivant ce chemin est égale à $p^k (1 - p)^{n-k}$.

Or, le nombre de chemins menant à k succès est égal au nombre de combinaisons à k éléments parmi n : $\binom{n}{k}$.

Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple 1

Un QCM comporte trois questions avec quatre réponses proposées dont une seule est correcte.

Un élève répond au hasard et ses réponses sont indépendantes les unes des autres.

- a. Justifier que la situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

☞ Choisir au hasard une réponse à une question est une épreuve de Bernoulli dont le succès est :
« La réponse est correcte » de probabilité $p = \frac{1}{4}$.

☞ On répète $n = 3$ fois cette épreuve de Bernoulli de manière identique et dans des conditions d'indépendance. Obtient un schéma de Bernoulli.

☞ Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$.

Et donc $\forall k \in \llbracket 0 ; 3 \rrbracket$ $P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$

- b. Calculer la probabilité que l'élève ait deux bonnes réponses. *Arrondir au millième.*

$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$, soit $P(X = 2) \approx 0,141$.

Donc la probabilité pour que l'élève ait exactement deux réponses correctes est environ 0,141.

- c. Calculer la probabilité que l'élève ait au plus deux réponses correctes. *Arrondir au millième.*

1^{ère} méthode

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X \leq 2) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1$.

$P(X \leq 2) \approx 0,984$.

Donc la probabilité pour que l'élève ait au plus deux réponses correctes est environ 0,984.

2^{ème} méthode

$P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - \binom{3}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \approx 1 - 0,016$, soit $P(X \leq 2) \approx 0,984$.

Remarque

Avec la calculatrice

Casio : MENU 2 (STAT) F5 (DIST)

F5 (BINOMIAL)

b) F1 (Bpd) puis renseigner la boîte de dialogue.

D.P. binomiale
p=0.140625c) F2 (Bcd) et renseigner :
Lower=0, upper=2D.C. binomiale
p=0.984375

TI : 2nde var (distrib)

b) B1binomFdp(

binomFdp
nbreEssais:3
p:0.25
valeur de x:2
Coller

binomFdp(3..25,2)

0.140625

c) B1binomFdp(

binomFdp(3..25,2)

0.984375

NumWorks : Probabilités EXE

Binomiale EXE, renseigner n et p

Suivant

b) Sélectionner et :

P(X=2) = 0.140625

c) Sélectionner et :

P(X≤2) = 0.984375

**Exemple 2** Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à ou supérieure à une valeur donnée

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A.

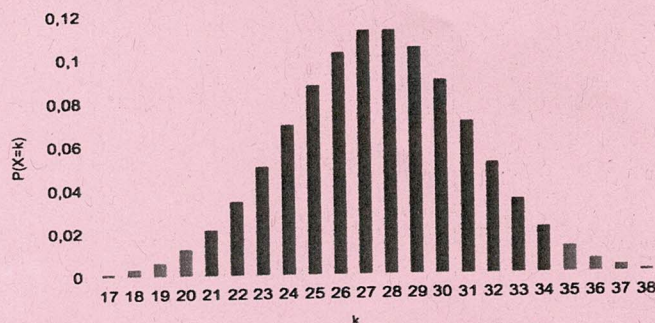
On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.

1. Déterminer des réels
- a
- et
- b
- tels que :
- $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$
- .

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,55$.On cherche a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$.

- On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0,025$. On lit : $a = 21$.
- On détermine ensuite b , le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$. On lit : $b = 34$.
- On vérifie que $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0,95$.

En effet, $P(21 \leq X \leq 34) = P(X \leq 34) - P(X < 21) = P(X \leq 34) - P(X \leq 20)$.Or, $P(X \leq 34) \geq 0,975$ et comme $P(X \leq 20) \leq 0,025$, on a $-P(X \leq 20) \geq -0,025$.D'où $P(X \leq 34) - P(X \leq 20) \geq 0,95$. Donc $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0,95$.

2. Interprétation. Or,
- $\frac{21}{50} = \frac{42}{100}$
- et
- $\frac{34}{50} = \frac{68}{100}$
- .

Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

Remarque L'intervalle $[0,42 ; 0,68]$ s'appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.**Propriété (momentanément admise) : espérance et variance**Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$.

- l'espérance de X : $E(X) = np$
- la variance de X : $V(X) = np(1 - p)$.

ExempleDans l'exemple 1 précédent, l'espérance est $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{4} = 0,75$.

Cela signifie que, en moyenne, l'élève a réponses correctes dans son QCM.

presque 1